Informatie over Colloquium doctum Wiskunde niveau 1
voor Sociale Wetenschappen en Historische Wetenschappen
ERASMUS UNIVERSITEIT ROTTERDAM

Algemene informatie

Tijdsduur: 1 uur 15 minuten. Het examen bestaat uit 7 opgaven. De kandidaat dient slechts 5 van deze 7 opgaven te beantwoorden. Om het examen te halen, hoeft een kandidaat dus niet alle onderwerpen in onderstaande lijst te beheersen. Voor elke opgave kan maximaal 3 punten behaald worden. Wanneer het totale resultaat 8 punten of meer bedraagt, is de kandidaat verzekerd van een voldoende.

In het geval dat een kandidaat meer dan het hierboven vermelde aantal opgaven beantwoordt, worden de punten behaald met overtollig beantwoorde opgaven niet meegeteld. In dergelijke gevallen bepaalt de examinator welke antwoorden meetellen en welke antwoorden als overtollig worden beschouwd.

Alle antwoorden dienen steeds zo volledig mogelijk beargumenteerd te worden. Bij opgaven met de term "bereken", "bepaal" of "los op" wordt een exact antwoord met een algebraïsche afleiding verwacht.

Het is niet toegestaan gebruik te maken van een formuleblad of van een grafische of programmeerbare rekenmachine. Het gebruik van een gewone rekenmachine is wel toegestaan.

Inhoudelijke informatie

Er wordt geëxamineerd over de volgende onderwerpen:

A: GETALLEN EN REKENREGELS

1. De verzamelingen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ en de operaties optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

Natuurlijke getallen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
Gehele getallen: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
Rationale getallen: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$

$$a(b+c) = ab + ac$$
$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$
$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

2. Absolute waarde $|x|$ en eenvoudige grafieken met de absolute waarde.

$$|x| = \begin{cases} x & als \quad x \geq 0 \\ -x & als \quad x < 0 \end{cases}$$

3. De regels voor het machtsverheffen en de overeenkomstige regels voor logaritmen. Gebruik van rationale en negatieve exponenten.

Onderstaande regels gelden onder de volgende voorwaarden :
$p, q \in \mathbb{Q}$, $a, b > 0$ *en* $g \in \mathbb{N}, g \neq 1$:

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
$(a^p)^q = a^{pq}$
$(ab)^p = a^p b^p$
$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$
$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$
$a^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{a}$
${}^g\log a^p = p \cdot {}^g\log a$
${}^g\log a = \frac{\log a}{\log g} = \frac{\ln a}{\ln g}$
${}^g\log a + {}^g\log b = {}^g\log ab$
${}^g\log a - {}^g\log b = {}^g\log \frac{a}{b}$
Opmerking: log *is de gebruikelijke notatie voor* ${}^{10}\log$

B: STANDAARDFUNCTIES

1. Kenmerkende eigenschappen van de volgende standaardfuncties:
   - polynomen,

     In het bijzonder:
     de lineaire functie $y = ax + b$ *met* $x, a, b \in \mathbb{R}$
     de kwadratische (tweedegraads) functie $y = ax^2 + bx + c$ *met* $x, a, b, c \in \mathbb{R}$

   - machtsfuncties $y = c \cdot x^n$, met $c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Q}$,

     In het bijzonder de functie $y = \sqrt{x}$, *voor* $x \geq 0$

   - exponentiële functies van het type $y = g^x$ met $g \in \mathbb{N}$ en hun inverse functie $y = {}^g\log x$, met $g \in \mathbb{N}, g \neq 1$ en $x > 0$,
   - de functie $y = e^x$, met $x \in \mathbb{R}$ en zijn inverse functie $y = \ln x$, voor $x > 0$,
2. Hanteren van samenstellingen en inversen van de standaardfuncties.

   Bijvoorbeeld: $y = \sqrt{3x - 6}$ *voor* $x \geq 2$.

3. Grafieken schetsen van de standaardfuncties en daarbij de begrippen domein (alle mogelijke waarden van x waarvoor de functie gedefinieerd is), bereik (alle waarden die y kan aannemen bij de gegeven functie), nulpunten, stijgen en dalen hanteren.
4. Grafieken schetsen van de goniometrische functies $y = \sin x$ en $y = \cos x$. Daarbij de begrippen periode ($= 2\pi$), amplitude ($= 1$) en evenwichtsstand ($= 0$) hanteren.

5. Op grafieken transformaties uitvoeren zoals verschuiven en rekken, en de samenhang tussen de verandering en het bijbehorende functievoorschrift beschrijven.

   Bijvoorbeeld, gegeven een functie $f(x)$:
   - *translatie van $f(x)$ over de vector (a, b) geeft $y = f(x - a) + b$*
   - *vermenigvuldiging van $f(x)$ met a t.o.v. de x-as geeft $y = a \cdot f(x)$*
   - *vermenigvuldiging van $f(x)$ met b t.o.v. de y-as geeft $y = f(x/b)$*

C: VERGELIJKINGEN EN ONGELIJKHEDEN

1. Een tweedegraads polynoom (kwadratische functie) ontbinden in lineaire factoren.

   Bijvoorbeeld:
   - $f(x) = x^2 - 2x - 15$ *ontbinden tot* $f(x) = (x - 5)(x + 3)$
   - $f(x) = x^2 - 2x$ *ontbinden tot* $f(x) = x(x - 2)$

2. De oplossing geven van een tweedegraads vergelijking door middel van ontbinden in factoren of met behulp van de zogenaamde "abc-formule":

   $ax^2 + bx + c = 0$ *heeft als oplossingen* $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$

3. De volgende vergelijkingen met hun oplossingen:

   $$\begin{array}{lll} x^a = b & \Rightarrow & x = b^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{b} \\ g^x = a & \Rightarrow & x = {}^g\log a = \frac{\log a}{\log g} = \frac{\ln a}{\ln g} \\ {}^g\log x = a & \Rightarrow & x = g^a \end{array}$$

4. Ongelijkheden oplossen m.b.v. een schets.

   Bijvoorbeeld: $x^2 - 3x - 10 > -x + 5$.
   Snijpunten berekenen levert: $x = 5$ *of* $x = -3$.
   Uit een schets van de grafieken volgt het antwoord: $x < -3$ *of* $x > 5$.

D: CALCULUS

1. De diverse notaties voor de afgeleide functie herkennen en gebruiken.

   $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$ *en* $\frac{df}{dx}(x)$ *zijn allen notaties voor hetzelfde begrip.*

2. De afgeleide functie bepalen van de som, het product, het quotiënt en (in eenvoudige gevallen) van samenstellingen van standaardfuncties zoals beschreven in punt B1 en B2. Hanteren van som-, product-, quotiënt- en kettingregel voor differentiëren.

   Enkele voorbeelden:

somregel:	$f(x) = x^2 + \sqrt{x}$	$\Rightarrow$	$f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
productregel:	$f(x) = (x^2 - 3x + 5)\ln x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = (2x - 3)\ln x + (x^2 - 3x + 5) \cdot \frac{1}{x}$
quotiëntregel:	$f(x) = \frac{x^2}{5x+3}$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \frac{(5x+3)\cdot 2x - x^2(5)}{(5x+3)^2} = \frac{x^2+6x}{(5x+3)^2}$
kettingregel:	$f(x) = (5x^2 + 7)^4$	$\Rightarrow$	$f'(x) = 4(5x^2 + 7)^3 \cdot 10x = 40x(5x^2 + 7)^3$

3. Vaststellen op welke intervallen er sprake is van een constant (afgeleide $= 0$), een stijgend (afgeleide > 0) of een dalend (afgeleide < 0) verloop van een functie.

E: LIJNEN EN STELSELS

1. Vergelijking van een lijn opstellen wanneer er twee punten op die lijn gegeven zijn, of wanneer er één punt en een richtingscoëfficiënt van de lijn gegeven is.
2. Voorwaarde kennen voor evenwijdige lijnen en voor loodrechte lijnen.

   De lijnen $y = ax + b$ en $y = cx + d$ zijn evenwijding als $a = c$. De lijnen staan loodrecht op elkaar als $ac = -1$.

3. Een stelsel van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden oplossen.

   Bijvoorbeeld:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

4. Een grafische voorstelling maken van een stelsel lineaire ongelijkheden.

F: COMBINATORIEK

1. Naar aanleiding van een tekst voor een telprobleem een geschikte visualisatie tekenen, zoals een boomdiagram, een wegendiagram of een rooster.

   Denk aan een rooster bijvoorbeeld bij het uitschrijven van alle mogelijkheden van het gooien met twee dobbelstenen.

2. Als de volgorde van kiezen van belang is dan rekenen met permutaties. Het aantal permutaties van r dingen uit n is gelijk aan

$$r \text{ uit } n = P_k^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

   Bijvoorbeeld: het kiezen van een voorzitter, een penningmeester en een notaris uit een groep van 5 personen kan op 60 verschillende manieren.

3. Als de volgorde van kiezen niet van belang is dan rekenen met combinaties. Het aantal combinaties van r dingen uit n is gelijk aan

$$n \text{ boven } r = C_k^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

   Bijvoorbeeld: het kiezen van een commissie van 3 personen uit een groep van 5 personen kan op 10 verschillende manieren.

4. Bij telproblemen vaststellen of er sprake is van rangschikken met herhaling of rangschikken zonder herhaling.

   Bijvoorbeeld: drie letters uit het alfabet kiezen met herhaling geeft $26 \cdot 26 \cdot 26$ *mogelijkheden. Drie letters uit het alfabet kiezen zonder herhaling geeft* $26 \cdot 25 \cdot 24$ *mogelijkheden.*

5. Bij telproblemen vaststellen of gebruik gemaakt mag worden van de productregel op grond van onafhankelijkheid. (Zie ook G5 en G7.)

   Zie het bovenstaande voorbeeld: bij trekking van letters uit het alfabet met herhaling is er sprake van onafhankelijke trekkingen. Wanneer de letters zonder herhaling getrokken worden, is de uitkomst van de tweede en derde trekking afhankelijk van wat er eerder gebeurd is. Deze trekkingen zijn dus afhankelijk.

G: KANSEN

1. Bij toevalsexperimenten de begrippen uitkomst, uitkomstenverzameling, gebeurtenis, elementaire gebeurtenis, onmogelijke gebeurtenis en elkaar uitsluitende gebeurtenissen hanteren.
2. Kansexperimenten vertalen naar een vaasmodel, al dan niet met teruglegging en al dan niet rekening houdend met trekkingsvolgorde.

   - *Wanneer bij elke trekking de opeenvolgende kansen onveranderd blijven komt dit overeen met het vaasmodel waarbij getrokken wordt met terugleggen.*
   - *Het simultaan trekken van twee dingen komt bij het vaasmodel overeen met tweemaal trekken zonder terugleggen.*

3. Kansen berekenen op grond van symmetrie-veronderstellingen en systematisch tellen.
4. Combinatorische aspecten herkennen bij het tellen van het aantal elementen van een uitkomstenverzameling. Gebruik maken van de regel
   Kans = (aantal gunstige uitkomsten) / (aantal mogelijke uitkomsten)
5. Kansen berekenen door gebruik te maken van de productregel voor onafhankelijke gebeurtenissen. (Zie ook F5 en G7.)

   - *Productregel: als gebeurenis* A *en gebeurtenis* B *onafhakelijk zijn van elkaar dan geldt*
   $$P(A \text{ en } B) = P(A) \cdot P(B)$$

   Tegenvoorbeeld: gooien met twee dobbelstenen, waarbij X *het aantal ogen representeert.* $P(X > 9 \text{ èn } X \text{is even}) = \frac{4}{36} \neq P(X > 9) \cdot P(X \text{is even}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$.

6. Kansen berekenen door gebruik te maken van de somregel en de complementregel.

   - *Somregel: als gebeurenis* A *en gebeurtenis* B *elkaar uitsluiten geldt* $P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B)$.
   - *Complementregel:* $P(A) = 1 - P(\text{niet-}A)$.

7. De begrippen onafhankelijke gebeurtenissen en voorwaardelijke kans hanteren voor symmetrische en niet-symmetrische kansruimten. (Zie ook F5 en G5.)

   - *De gebeurtenissen A en B zijn onafhankelijk als*
   $$P(A \text{ en } B) = P(A) \cdot P(B)$$
   - *Bij een voorwaardelijke kans geldt $P(A \mid B) = P(A \text{ en } B)/P(B)$.*

8. De waardenverzameling van een discrete toevalsvariable (in eenvoudige gevallen met de bijbehorende kansverdeling) beschrijven.

   Bijvoorbeeld: gooien met vier dobbelstenen. Interesse in het aantal zessen dat er valt. Toevalsvariabele is X, dus X = aantal gegooide zessen. X kan de waarden $0, 1, 2, 3$ of 4 krijgen.
   - $P(X = 0) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{625}{1296}$
   - $P(X = 1) = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{500}{1296}$
   - $P(X = 2) = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{150}{1296}$
   - $P(X = 3) = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{20}{1296}$
   - $P(X = 4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{1296}$

   Merk op dat $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 1$.

9. Voor een discrete toevalsvariabele met gegeven kansverdeling de verwachtingswaarde berekenen en interpreteren.

   Vervolg van het voorbeeld hierboven: de verwachtingswaarde $E(X)$ van de discrete toevalsvariabele X is gelijk aan
   $$E(X) = 0 \cdot \frac{625}{1296} + 1 \cdot \frac{500}{1296} + 2 \cdot \frac{150}{1296} + 3 \cdot \frac{20}{1296} + 4 \cdot \frac{1}{1296} = \frac{864}{1296} = \frac{2}{3}$$

10. De regel "De verwachting van de som = de som van de verwachtingen" hanteren.

H: OVERIGE ONDERWERPEN

1. De formule $N(t) = N_0 \cdot g^t$, die exponentiële groei beschrijft, opstellen en hanteren.

   Voorbeeld: Een populatie bacteriën die begint met een aantal van $100\,000$ en die elk uur (exponentiëel) groeit met een groeifactor gelijk aan $1,5$ (dus ieder uur komt er 50% van het aantal aanwezige bacteriën bij), kan worden beschreven met de formule $N(t) = 100\,000(1,5)^t$.

2. Groeifactoren en groeipercentages omrekenen.

   Voorbeeld: een groeifactor van $1,5$ per uur, komt overeen met een groeifactor van $(1,5)^{\frac{1}{4}} \approx 1,1067$ per kwartier. Een groeipercentage van 50% per uur, komt dus overeen met een groeipercentage van ongeveer $10,67\%$ per kwartier.

3. Berekeningen maken waarbij "rente op rente" een rol speelt.

   Voorbeeld: een kapitaal van $100\,000$ euro, dat op de bank wordt gezet tegen een rentepercentage van 5% per jaar is na 10 jaar gegroeit tot $100\,000(1,05)^{10}$ euro.

4. Berekenen van de zogenaamde "centrummaten": gemiddelde, mediaan en modus.

   Het gemiddelde van de getallen $1, 1, 1, 2, 2, 4, 4, 7, 9,$ *en* 9 *is gelijk aan* $\frac{40}{10} = 4$. *De mediaan (het unieke middelste getal, of anders het gemiddelde van de twee middelste getallen, wanneer de gegevens in numerieke volgorde staan) is gelijk aan* $\frac{2+4}{2} = 3$, *en de modus (het meest voorkomende getal) is gelijk aan* 1.

5. Bij een verzameling gegevens een frequentietabel, eventueel met klassenverdelingen, maken.

Extra: VOORBEELDEN VAN TOETSOPGAVEN

A: GETALLEN EN REKENREGELS

Opgave 1

Schrijf als één breuk en vereenvoudig zo ver mogelijk:

(a) $2 + \dfrac{1}{x+2}$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{13^2 - 5^2}} + \dfrac{5}{12}$

(c) $\dfrac{4x^4}{x^6} + \dfrac{2\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}} + \dfrac{8}{\sqrt{x^4}}$

B: STANDAARDFUNCTIES

Opgave 2

Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{2x-1}$ en $g(x) = x - 2$.

(a) Bereken $f(-1), f(1), f(3), f(6), g(-1), g(1), g(3)$ en $g(6)$

(b) Teken de grafiek van f en g in het (x, y)-vlak.

(c) Bereken de coördinaten van het snijpunt van f en g.

C: VERGELIJKINGEN EN ONGELIJKHEDEN

Opgave 3

Los de volgende vergelijkingen op:

(a) $x^2 + 10x + 24 = 0$

(b) $x^2 + 10x - 24 = 0$

(c) $x^2 - 10x + 24 = 0$

Opgave 4

(a) Teken in het (x, y)-vlak het gebied waarvoor geldt:

$$y \leq -\frac{1}{3}x + 6 \text{ en } y \geq 2x - 8 \text{ en } x \geq 3$$

(b) Dit gebied heeft drie hoekpunten. Bepaal de (x, y)-coördinaten van deze hoekpunten.

D: CALCULUS

Opgave 5

Differentieer de volgende functies naar x, en vereenvoudig het antwoord zo ver mogelijk:

(a) $f(x) = (x-3) + (5-2x^2)$

(b) $f(x) = \dfrac{x-3}{5-2x^2}$

(c) $f(x) = (x-3)(5-2x^2)$

E: LIJNEN EN STELSELS

Opgave 6

Los de volgende stelsels vergelijkingen op:

(a) $\begin{cases} x - 5y = -1 \\ 3x + 4y = 16 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x - \frac{3}{2}y = 0 \end{cases}$

F: COMBINATORIEK

Opgave 7

Een (luie) wiskundeleraar maakt een tentamen dat bestaat uit 5 multiple choice vragen. Bij elke vraag is er keuze uit 4 mogelijke antwoorden waarvan er precies één correct is.

(a) Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er om het antwoordformulier van dit tentamen in te vullen?

(b) Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er met precies 4 goede antwoorden?

Jan, een (luie) student, heeft niet geleerd voor dit tentamen en gokt bij elke vraag.

(c) Bereken de kans dat Jan alle 5 de vragen foutief beantwoordt.

(d) Bereken de kans dat Jan precies 3 vragen correct beantwoordt.

G: KANSEN

Opgave 8

Een vaas bevat 2 rode, 8 witte, 4 groene en 6 blauwe knikkers. Er worden, zonder terugleggen, drie knikkers uit de vaas gepakt.

(a) Bereken de kans op 3 blauwe knikkers.

(b) Bereken de kans op precies één blauwe knikker.

De drie knikkers worden weer terug in de vaas gedaan. Een tweede vaas bevat 3 witte en 7 blauwe knikkers. Uit elke vaas wordt één knikker gepakt.

(c) Wat is de kans dat één van de getrokken knikkers wit is en de andere blauw?

H: OVERIGE ONDERWERPEN

Opgave 9

In een dierenasiel wordt een groep van 150 muizen gehouden. De omvang van de groep groeit exponentieel met een toename van 13 procent per jaar.

(a) Stel een formule op voor de grootte van de populatie.

(b) Wat is de verdubbelingstijd (in jaren) van deze groep?

(c) Op welk tijdstip zijn er voor het eerst meer dan 621 muizen?

(d) Wat is de groeifactor van deze groep muizen per kwartaal?

Opgave 10

Het aantal uren zonneschijn per dag op Texel wordt 9 keer gemeten. Dit was het resultaat: 5, 2, 8, 6, 3, 10, 8, 10, 8.

(a) Bepaal het gemiddelde, de modus en de mediaan.

Ook op de tiende dag wordt een meting gedaan. Door toevoeging van het meetresultaat aan bovenstaande gegevens is het gemiddelde aantal uren zonneschijn gelijk geworden aan 6,9.

(b) Bepaal het aantal uren zonneschijn op de tiende dag.

(c) Zijn door toevoeging van dit nieuwe meetresultaat de modus en de mediaan ook veranderd? Verklaar uw antwoord.

Combinatie van A, B EN C

Opgave 11

(a) Teken in het (x, y)-vlak het gebied waarvoor geldt:

$$y \geq |x-2| \text{ en } y \leq \frac{1}{5}x + 2.$$

(b) Dit gebied heeft drie hoekpunten. Bepaal de (x, y)-coördinaten van deze hoekpunten.